

Konstruksi dan Analisis Kestabilan Model Populasi *Prey-Predator* dengan Migrasi *Predator* pada Dua Wilayah (Studi Kasus : Ikan Tuna dan Ikan Teri pada Ekosistem Laut Indonesia)

Nihaya Alivia Coraima Dewi, Hariyanto, dan Suharmadi
Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)
Jl. Arief Rahman Hakim, Surabaya 60111 Indonesia
e-mail: hariyanto@matematika.its.ac.id

Abstrak— Proses interaksi antar makhluk hidup dalam memenuhi kebutuhan makanan terjadi pada rantai makanan yang terdiri dari *predator* dan *prey*. Jika salah satu populasi *predator* dan *prey* punah maka keadaan ekosistem menjadi tidak stabil. Masalah tersebut dapat diselesaikan dengan merubah fenomena yang ada kedalam bentuk model matematika. Model matematika *prey-predator* sebelumnya telah dikembangkan dengan adanya pemanenan *prey-predator* serta migrasi pada *predator* ke wilayah lain yang tidak diteliti. Pada penelitian ini dikonstruksi model matematika *prey-predator* untuk menggambarkan fenomena yang terjadi pada wilayah lain yang belum diteliti, sehingga menghasilkan model pada wilayah I dan model pada wilayah II. Model tersebut berupa persamaan diferensial nonlinear tingkat satu yang mempunyai kondisi awal dan kondisi batas. Pada masing-masing model diperoleh titik kesetimbangan yang bersifat stabil, serta berdasarkan hasil simulasi pada ikan tuna dan ikan teri menunjukkan bahwa sistem yang stabil terjadi pada waktu 2,5 tahun untuk wilayah I dan 1,6 tahun untuk wilayah II.

Kata Kunci— Konstruksi Model, Analisis Kestabilan, Migrasi.

I. PENDAHULUAN

EKOLOGI adalah ilmu tentang lingkungan hidup yang terdiri dari unsur keanekaan dan proses interaksi. Semakin tinggi keanekaan maka semakin stabil mutu ekosistem. Keanekaan makhluk hidup pada lingkungan berpotensi untuk saling mempengaruhi. Potensi yang dimiliki oleh makhluk hidup dapat menimbulkan interaksi dalam lingkungan yang selanjutnya berfungsi sebagai mata rantai kehidupan [7]. Demi keberlangsungan kehidupan setiap makhluk hidup membutuhkan makanan untuk memenuhi kebutuhan dalam bertahan hidup. Proses interaksi makhluk hidup dalam memenuhi kebutuhan makanan terjadi pada proses rantai makanan yang berkaitan erat dengan *predator* dan *prey*. *Predator* mempunyai peran memangsa *prey*, apabila salah satu dari *predator* dan *prey* mengalami kepunahan maka keadaan ekosistem menjadi tidak stabil. Sehingga perlu dilakukan penelitian lebih lanjut untuk memecahkan masalah ekologi tersebut. Salah satu proses pemecahan masalah dengan membentuk permasalahan dari hasil penelitian berupa fenomena menjadi model matematika menggunakan penerapan ilmu matematika yaitu pemodelan matematika.

Model matematika dibentuk berdasarkan analogi dari fenomena-fenomena objek penelitian yang diperoleh dari

hasil analogi masalah-masalah nyata lingkungan disekitar yang ditulis dalam bentuk matematika berupa persamaan diferensial [2]. Model matematika pada *prey-predator* telah diteliti oleh A.J Lotka dan Vito Volterra pada tahun 1920 [9] berupa penelitian pada laju perkembangan dan kepunahan suatu populasi *prey* yang di mangsa oleh *predator* dan telah dilakukan penelitian pula terkait interaksi *prey-predator* pada suatu ekosistem dengan adanya pemanenan pada kedua objek penelitian dan migrasi *predator* karena jumlah *prey* tidak mencukupi kebutuhan *predator* ke suatu wilayah yang tidak diteliti [6].

Pada permasalahan *prey-predator* yang di maksud kondisi stabil adalah saat kedua populasi tidak punah, sehingga proses interaksi tetap bisa berjalan. Kondisi stabil dalam permasalahan *prey-predator* dipengaruhi oleh parameter-parameter yang diperoleh dari fenomena yang ada, yaitu tingkat kelahiran *prey* dan *predator*, tingkat pemanenan *prey* dan *predator*, tingkat migrasi *predator*, serta tingkat kematian *prey* dan *predator* akibat jumlah ketersediaan makanan yang tidak memenuhi.

Pada tugas akhir ini akan dilakukan penelitian lebih lanjut dari penelitian yang telah dilakukan sebelumnya yaitu tentang konstruksi model populasi *prey-predator* dengan migrasi *predator* menuju wilayah kedua karena jumlah *prey* tidak mencukupi kebutuhan *predator* dan dilakukan analisis kestabilan beserta simulasi kestabilan menggunakan metode Runge-Kutta dan software MATLAB R2010a. Kemudian dilakukan studi kasus sebagai contoh penerapan model saat simulasi pada makhluk hidup yang mempunyai fenomena yang sama seperti yang terjadi pada model penelitian, yaitu melakukan simulasi kestabilan pada ekosistem laut Indonesia dengan menggunakan objek penelitian ikan tuna (*Thunnus*) sebagai *predator*, ikan teri (*Stelephorus sp*) sebagai *prey*, dan plankton sebagai makanan dari *prey*, dengan jalur migrasi ikan tuna pada zona ekonomi eksklusif (ZEE).

II. METODOLOGI PENELITIAN

Tahap-tahap yang dilakukan dalam penelitian adalah sebagai berikut

A. Pemodelan Matematika

Pada penelitian ini yang pertama dilakukan adalah mengkonstruksi model dengan melakukan pemodelan matematika yang dimulai dari menyusun fenomena-

fenomena yang terjadi pada sistem yang diteliti, sehingga menghasilkan suatu model baru karena terdapat penambahan fenomena pada saat mengkonstruksi model. Selanjutnya hasil konstruksi model dilakukan validasi model dengan cara melakukan pembuktian bahwa model tersebut mempunyai penyelesaian dan positif.

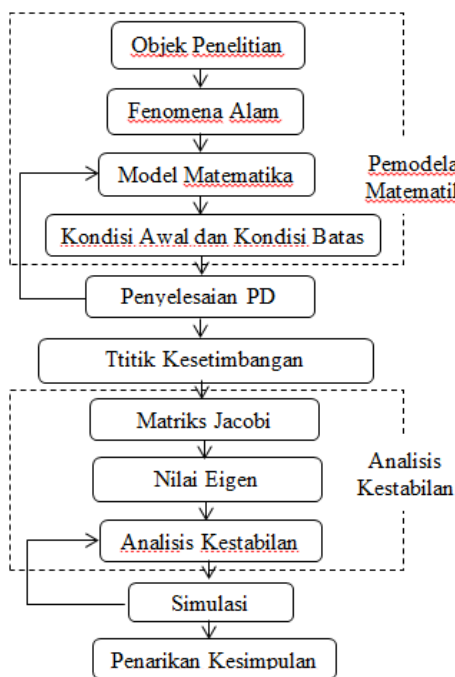
B. Titik Keseimbangan dan Kestabilan

Pada tahap ini dicari titik keseimbangan dengan laju masing-masing populasi adalah nol. Kemudian dilakukan analisis kestabilan yang sebelumnya dilakukan linearisasi pada model karena model yang diperoleh dari hasil konstruksi berbentuk persamaan diferensial tak linear, dan dari hasil linearisasi dilakukan analisis kestabilan pada titik keseimbangan dengan mencari nilai eigen dari matriks jacobii pada setiap titik setimbang.

C. Simulasi

Tahap ini akan dilakukan simulasi numerik *Runge-Kutta* orde 4 dengan menggunakan *software* MATLAB R2010a untuk mengetahui grafik kestabilan dan penyelesaian numerik dari model *prey* dan *predator* serta untuk mendapatkan nilai parameter-parameter dari fenomena yang terjadi pada ikan tuna dan ikan teri supaya diperoleh kondisi ekosistem yang stabil.

Berikut adalah diagram alur penelitian dalam pengerjaan tugas akhir



Gambar 1. Diagram Alur Metode Penelitian

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Konstruksi Model Prey-Predator pada Dua Wilayah dengan Migrasi Predator

Diperoleh laju perubahan populasi *prey* dan *predator* di masing-masing wilayah, laju perubahan populasi tersebut memenuhi sistem persamaan diferensial nonlinear sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 \frac{dM_1}{dt} &= M_1 \left\{ n_{M_1}(1 - \gamma_{M_1}) - \gamma_{M_1} - \alpha_{M_1}M_1 \right. \\
 &\quad \left. - \beta_{M_1}P_1 \int_0^T k_{P_1}^-(t)dt - \beta_M \int_0^T k_{P_1}^+(t)P_2 dt \right\} \\
 \frac{dP_1}{dt} &= P_1 \left\{ n_{P_1}(1 - \gamma_{P_1}) - \gamma_{P_1} - \alpha_{P_1}P_1 \right. \\
 &\quad \left. + \beta_{P_1}M_1(k_{M_1}^+(t) + k_{M_1}^-(t)) \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^T k_{P_1}^-(t)dt + \int_0^T k_{P_1}^+(t)P_2 dt \right\} \\
 \frac{dM_2}{dt} &= M_2 \left\{ n_{M_2}(1 - \gamma_{M_2}) - \gamma_{M_2} - \alpha_{M_2}M_2 - \beta_{M_2}P_2 \int_0^T k_{P_2}^-(t)dt \right. \\
 &\quad \left. - \beta_{M_2} \int_0^T k_{P_2}^+(t)P_1 dt \right\} \\
 \frac{dP_2}{dt} &= P_2 \left\{ n_{P_2}(1 - \gamma_{P_2}) - \gamma_{P_2} - \alpha_{P_2}P_2 \right. \\
 &\quad \left. + \beta_{P_2}M_2(k_{M_2}^+(t) + k_{M_2}^-(t)) \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^T k_{P_2}^-(t)dt + \int_0^T k_{P_2}^+(t)P_1 dt \right\} \quad (1)
 \end{aligned}$$

dimana

$$M_1, M_2, P_1, P_2 > 0,$$

$$n_{M_1} > n_{P_1} > 0, n_{M_2} > n_{P_2} > 0, \gamma_{M_1}, \gamma_{M_2}, \gamma_{P_1},$$

$$\gamma_{P_2}, \alpha_{M_1}, \alpha_{M_2}, \alpha_{P_1}, \alpha_{P_2}, \beta_{M_1}, \beta_{M_2}, \beta_{P_1}, \beta_{P_2} > 0$$

dengan fungsi bobot yaitu suatu fungsi perubahan nilai populasi selama migrasi pada kedua wilayah sebagai berikut:

$$k_{M_1}^+(t) = e^{at}, k_{M_1}^-(t) = e^{-bt}, \int_0^T k_{P_1}^+(t)dt = \int_0^T e^{qt}(t)dt,$$

$$\int_0^T k_{P_1}^-(t)dt = \int_0^T e^{-rt} dt \text{ dan } k_{M_2}^+(t) = e^{wt}, k_{M_2}^-(t) =$$

$$e^{-xt}, \int_0^T k_{P_2}^+(t)dt = \int_0^T e^{yt} dt, \int_0^T k_{P_2}^-(t)dt = \int_0^T e^{-zt} dt$$

$$a, b, r, q, w, x, y, z > 0$$

dengan

M_1 : populasi *prey* pada wilayah I

M_2 : populasi *prey* pada wilayah II

P_1 : populasi *predator* pada wilayah I

P_2 : populasi *predator* pada wilayah II

n_{M_1} : rate pertumbuhan alami *prey* di wilayah I

n_{M_2} : rate pertumbuhan alami *prey* di wilayah II

n_{P_1} : rate pertumbuhan alami *predator* di wilayah I

n_{P_2} : rate pertumbuhan alami *predator* di wilayah II

γ_{M_1} : rate pemanenan *prey* di wilayah I

γ_{M_2} : rate pemanenan *prey* di wilayah II

γ_{P_1} : rate pemanenan *predator* di wilayah I

γ_{P_2} : rate pemanenan *predator* di wilayah II

α_{M_1} : rate penurunan jumlah populasi *prey* akibat kekurangan makanan di wilayah I

- α_{M_2} : rate penurunan jumlah populasi *prey* akibat kekurangan makanan di wilayah II
- α_{P_1} : rate penurunan jumlah populasi *predator* akibat kekurangan makanan di wilayah I
- α_{P_2} : rate penurunan jumlah populasi *predator* akibat kekurangan makanan di wilayah II
- β_{M_1} : rate penurunan jumlah populasi *prey* akibat dimangsa oleh *predator* di wilayah I
- β_{M_2} : rate penurunan jumlah populasi *prey* akibat dimangsa oleh *predator* di wilayah II
- β_{P_1} : rate peningkatan jumlah populasi *predator* karena berhasil memangsa *prey* di wilayah I
- β_{P_2} : rate peningkatan jumlah populasi *predator* karena berhasil memangsa *prey* di wilayah II
- a : rate perubahan jumlah *prey* wilayah I saat *predator* wilayah I bermigrasi dari wilayah I menuju wilayah II
- b : rate perubahan jumlah *prey* wilayah I saat *predator* wilayah II bermigrasi dari wilayah II menuju wilayah I
- r : rate perubahan jumlah *predator* wilayah I saat *predator* wilayah I bermigrasi dari wilayah I menuju wilayah II
- q : rate perubahan jumlah *predator* wilayah I saat *predator* wilayah II bermigrasi dari wilayah II menuju wilayah I
- x : rate perubahan jumlah *prey* wilayah II saat *predator* wilayah I bermigrasi dari wilayah I menuju wilayah II
- w : rate perubahan jumlah *prey* wilayah II saat *predator* wilayah II bermigrasi dari wilayah II menuju wilayah I
- y : rate perubahan jumlah *predator* wilayah II saat *predator* wilayah I bermigrasi dari wilayah I menuju wilayah II
- z : perubahan jumlah *predator* wilayah II saat *predator* wilayah II bermigrasi dari wilayah II menuju wilayah I

B. Penyelesaian Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial sistem yang sudah diperoleh dari hasil konstruksi dicari penyelesaiannya dan dilakukan pembuktian bahwa persamaan diferensial sistem mempunyai penyelesaian untuk nilai dari populasi *prey* dan *predator* positif.

$$\dot{M}_1 - \left\{ n_{M_1}(1 - \gamma_{M_1}) - \gamma_{M_1} - \beta_{M_1}P_1 \int_0^T k_{P_1}^-(t)dt - \beta_M \int_0^T k_{P_1}^+(t)P_2 dt \right\} M_1 = -\alpha_{M_1}M_1^2$$

$$\dot{P}_1 - \left\{ n_{P_1}(1 - \gamma_{P_1}) - \gamma_{P_1} + \beta_{P_1}M_1 (k_{M_1}^+(t) + k_{M_1}^-(t)) - \int_0^T k_{P_1}^-(t)dt + \int_0^T k_{P_1}^+(t)P_2 dt \right\} P_1 = -\alpha_{P_1}P_1^2$$

$$\dot{M}_2 - \left\{ n_{M_2}(1 - \gamma_{M_2}) - \gamma_{M_2} - \beta_{M_2}P_2 \int_0^T k_{P_2}^-(t)dt - \beta_{M_2} \int_0^T k_{P_2}^+(t)P_1 dt \right\} M_2 = -\alpha_{M_2}M_2^2$$

$$\dot{P}_2 - \left\{ n_{P_2}(1 - \gamma_{P_2}) - \gamma_{P_2} + \beta_{P_2}M_2 (k_{M_2}^+(t) + k_{M_2}^-(t)) - \int_0^T k_{P_2}^-(t)dt + \int_0^T k_{P_2}^+(t)P_1 dt \right\} P_2 = -\alpha_{P_2}P_2^2 \quad (2)$$

Dengan cara menggunakan Faktor Pengintegral diperoleh penyelesaian persamaan diferensial pada M_1 dan P_1 sebagai berikut

$$M_1 = \frac{e^{Rt-S \int P_1(t)dt}}{\int \alpha_{M_1} e^{Rt-S \int P_1(t)dt} dt + c}$$

$$P_1 = \frac{e^{Vt-W \int M_1(t)dt}}{\int \alpha_{P_1} e^{Vt-W \int M_1(t)dt} dt + c}$$

dengan

$$R = (n_{M_1}(1 - \gamma_{M_1}) - \gamma_{M_1} - \beta_M \int_0^T k_{P_1}^+(t)P_2 dT)$$

$$S = (\beta_{M_1} \int_0^T k_{P_1}^-(t) dT)$$

$$V = (n_{P_1}(1 - \gamma_{P_1}) - \gamma_{P_1} - \int_0^T k_{P_1}^-(t)dt + \int_0^T k_{P_1}^+(t)P_2 dt)$$

$$W = (\beta_{P_1}(k_{M_1}^+(t) + k_{M_1}^-(t)))$$

Kemudian diperoleh penyelesaian pada M_2 dan P_2

$$M_2 = \frac{e^{Wt-X \int P_2(t)dt}}{\int \alpha_{M_2} e^{Wt-X \int P_2(t)dt} dt + c}$$

$$P_2 = \frac{e^{Yt-Z \int M_2(t)dt}}{\int \alpha_{P_2} e^{Yt-Z \int M_2(t)dt} dt + c}$$

dengan

$$W = (n_{M_2}(1 - \gamma_{M_2}) - \gamma_{M_2} - \beta_{M_2} \int_0^T k_{P_2}^+(t)P_1 dt)$$

$$X = (\beta_{M_2} \int_0^T k_{P_2}^-(t) dt)$$

$$Y = (n_{P_2}(1 - \gamma_{P_2}) - \gamma_{P_2} - \int_0^T k_{P_2}^-(t)dt + \int_0^T k_{P_2}^+(t)P_1 dt)$$

$$Z = (\beta_{P_2}(k_{M_2}^+(t) + k_{M_2}^-(t)))$$

C. Titik Keseimbangan

Model dari sistem persamaan (1) disubstitusikan nilai fungsi bobotnya dan diselesaikan bagian integralnya sebagai berikut

$$\frac{dM_1}{dt} = M_1 \left\{ n_{M_1}(1 - \gamma_{M_1}) - \gamma_{M_1} - \alpha_{M_1}M_1 + \frac{1}{r} \beta_{M_1}P_1(e^{-rT} - 1) - \frac{1}{q} \beta_{M_1}(P_2(T)e^{qT} - P_2(0)) \right\}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dP_1}{dt} &= P_1 \left\{ n_{P_1}(1 - \gamma_{P_1}) - \gamma_{P_1} - \alpha_{P_1}P_1 \right. \\
&\quad \left. + \beta_{P_1}M_1(e^{aT} + e^{-bT}) + \frac{1}{r}(e^{-rT} - 1) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{q}(P_2(T)e^{qT} - P_2(0)) \right\} \\
\frac{dM_2}{dt} &= M_2 \left\{ n_{M_2}(1 - \gamma_{M_2}) - \gamma_{M_2} - \alpha_{M_2}M_2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{z}\beta_{M_2}P_2(e^{-zT} - 1) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{y}\beta_{M_2}(P_1(T)e^{yT} - P_1(0)) \right\} \\
\frac{dP_2}{dt} &= P_2 \left\{ n_{P_2}(1 - \gamma_{P_2}) - \gamma_{P_2} - \alpha_{P_2}P_2 \right. \\
&\quad \left. + \beta_{P_2}M_2(e^{wT} + e^{-xT}) + \frac{1}{z}(e^{-zT} - 1) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{y}(P_1(T)e^{yT} - P_1(0)) \right\} \quad (3)
\end{aligned}$$

Model tersebut memiliki titik kesetimbangan [3] yaitu pada wilayah I (M_1^*, P_1^*) dan wilayah II (M_2^*, P_2^*) dengan $M_1^*, P_1^*, M_2^*, P_2^*$ sebagai berikut

$$\begin{aligned}
M_1^* &= \frac{\alpha_{P_1}n_{M_1}(1 - \gamma_{M_1}) - \alpha_{P_1}\gamma_{M_1}}{\alpha_{P_1}\alpha_{M_1} - \frac{1}{r}\beta_{M_1}\beta_{P_1}(e^{aT} + e^{-bT})(e^{-rT} - 1)} \\
&\quad + \frac{\frac{1}{r}\beta_{M_1}\left(\frac{1}{r}(e^{-rT} - 1) + n_{P_1}(1 - \gamma_{P_1}) - \gamma_{P_1}\right)(e^{-rT} - 1)}{\alpha_{P_1}\alpha_{M_1} - \frac{1}{r}\beta_{M_1}\beta_{P_1}(e^{aT} + e^{-bT})(e^{-rT} - 1)} \\
&\quad + \frac{\frac{1}{q}\beta_{M_1}\left(\frac{1}{r}(e^{-rT} - 1) - \alpha_{P_1}\right)(P_2(T)e^{qT} - P_2(0))}{\alpha_{P_1}\alpha_{M_1} - \frac{1}{r}\beta_{M_1}\beta_{P_1}(e^{aT} + e^{-bT})(e^{-rT} - 1)} \\
P_1^* &= \frac{\alpha_{M_1}n_{P_1}(1 - \gamma_{P_1}) - \alpha_{M_1}\gamma_{P_1} + \frac{1}{r}\alpha_{M_1}(e^{-rT} - 1)}{\alpha_{P_1}\alpha_{M_1} - \frac{1}{r}\beta_{M_1}\beta_{P_1}(e^{aT} + e^{-bT})(e^{-rT} - 1)} \\
&\quad + \frac{\beta_{P_1}(n_{M_1}(1 - \gamma_{M_1}) - \gamma_{M_1})(e^{aT} + e^{-bT})}{\alpha_{P_1}\alpha_{M_1} - \frac{1}{r}\beta_{M_1}\beta_{P_1}(e^{aT} + e^{-bT})(e^{-rT} - 1)} \\
&\quad + \frac{\frac{1}{q}(\alpha_{M_1} - \beta_{M_1}\beta_{P_1}(e^{aT} + e^{-bT}))(P_2(T)e^{qT} - P_2(0))}{\alpha_{P_1}\alpha_{M_1} - \frac{1}{r}\beta_{M_1}\beta_{P_1}(e^{aT} + e^{-bT})(e^{-rT} - 1)} \\
M_2^* &= \frac{\alpha_{P_2}n_{M_2}(1 - \gamma_{M_2}) - \alpha_{P_2}\gamma_{M_2}}{\alpha_{P_2}\alpha_{M_2} - \frac{1}{z}\beta_{M_2}\beta_{P_2}(e^{-zT} - 1)(e^{wT} + e^{-xT})} \\
&\quad + \frac{\frac{1}{z}\beta_{M_2}\left(\frac{1}{z}(e^{-zT} - 1) + n_{P_2}(1 - \gamma_{P_2}) - \gamma_{P_2}\right)(e^{-zT} - 1)}{\alpha_{P_2}\alpha_{M_2} - \frac{1}{z}\beta_{M_2}\beta_{P_2}(e^{-zT} - 1)(e^{wT} + e^{-xT})} \\
&\quad + \frac{\frac{1}{y}\beta_{M_2}\left(\frac{1}{z}(e^{-zT} - 1) - \alpha_{P_2}\right)(P_1(T)e^{yT} - P_1(0))}{\alpha_{P_2}\alpha_{M_2} - \frac{1}{z}\beta_{M_2}\beta_{P_2}(e^{-zT} - 1)(e^{wT} + e^{-xT})} \\
P_2^* &= \frac{\alpha_{M_2}n_{P_2}(1 - \gamma_{P_2}) - \alpha_{M_2}\gamma_{P_2} + \frac{1}{z}\alpha_{M_2}(e^{-zT} - 1)}{\alpha_{P_2}\alpha_{M_2} - \frac{1}{z}\beta_{M_2}\beta_{P_2}(e^{-zT} - 1)(e^{wT} + e^{-xT})} \\
&\quad + \frac{\beta_{P_2}(n_{M_2}(1 - \gamma_{M_2}) - \gamma_{M_2})(e^{wT} + e^{-xT})}{\alpha_{P_2}\alpha_{M_2} - \frac{1}{z}\beta_{M_2}\beta_{P_2}(e^{-zT} - 1)(e^{wT} + e^{-xT})} \\
&\quad + \frac{\frac{1}{y}(\alpha_{M_2} - \beta_{P_2}\beta_{M_2}(e^{wT} + e^{-xT}))(P_1(T)e^{yT} - P_1(0))}{\alpha_{P_2}\alpha_{M_2} - \frac{1}{z}\beta_{M_2}\beta_{P_2}(e^{-zT} - 1)(e^{wT} + e^{-xT})} \\
&\quad + \frac{\alpha_{P_2}\alpha_{M_2} - \frac{1}{z}\beta_{M_2}\beta_{P_2}(e^{-zT} - 1)(e^{wT} + e^{-xT})}{\alpha_{P_2}\alpha_{M_2} - \frac{1}{z}\beta_{M_2}\beta_{P_2}(e^{-zT} - 1)(e^{wT} + e^{-xT})}
\end{aligned}$$

dengan syarat

- $n_{M_1}(1 - \gamma_{M_1}) > \frac{1}{q}\beta_{M_1}(P_2(T)e^{qT} - P_2(0)) + \gamma_{M_1}$
- $n_{P_1}(1 - \gamma_{P_1}) + \frac{1}{q}(P_2(T)e^{qT} - P_2(0)) > \gamma_{P_1} - \frac{1}{r}(e^{-rT} - 1)$
- $n_{M_2}(1 - \gamma_{M_2}) > \gamma_{M_2} + \frac{1}{y}\beta_{M_2}(P_1(T)e^{yT} - P_1(0))$
- $n_{P_2}(1 - \gamma_{P_2}) + \frac{1}{y}(P_1(T)e^{yT} - P_1(0)) > \gamma_{P_2} - \frac{1}{z}(e^{-zT} - 1)$

D. Analisis Kestabilan pada Titik Kesetimbangan

Model *prey-predator* merupakan persamaan diferensial non linear sehingga harus dilinearkan terlebih dahulu untuk mendapatkan bentuk linearnya dilakukan pendekatan linear disekitar titik (M_1^*, P_1^*) yang merupakan titik kesetimbangan dari persamaan $\frac{dM_1}{dt}$ dan $\frac{dP_1}{dt}$ dengan melakukan ekspansi menurut deret Taylor disekitar titik (M_1^*, P_1^*) sehingga diperoleh matriks Jacobian

$$J_1^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial M_1} & \frac{\partial f_1}{\partial P_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial M_1} & \frac{\partial f_2}{\partial P_1} \end{bmatrix}_{(M_1^*, P_1^*)}$$

Sehingga matriks Jacobian pada wilayah I disekitar titik setimbang (M_1^*, P_1^*) diperoleh

$$J_1^* = \begin{bmatrix} -\alpha_{M_1}M_1^* & \frac{1}{r}\beta_{M_1}M_1^*(e^{-rT} - 1) \\ \beta_{P_1}P_1^*(e^{aT} + e^{-bT}) & -\alpha_{P_1}P_1^* \end{bmatrix}$$

Kemudian pada wilayah II juga menggunakan metode yang sama diperoleh

$$J_2^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial M_2} & \frac{\partial f_3}{\partial P_2} \\ \frac{\partial f_4}{\partial M_2} & \frac{\partial f_4}{\partial P_2} \end{bmatrix}_{(M_2^*, P_2^*)}$$

Sehingga matriks Jacobian pada wilayah II disekitar titik setimbang (M_2^*, P_2^*) diperoleh

$$J_{II}^* = \begin{bmatrix} -\alpha_{M_2}M_2^* & \frac{1}{z}\beta_{M_2}M_2^*(e^{-zT} - 1) \\ \beta_{P_2}P_2^*(e^{wT} + e^{-xT}) & -\alpha_{P_2}P_2^* \end{bmatrix}$$

Dilakukan analisis kestabilan [8] sistem *prey* dan *predator* pada titik kesetimbangan yang telah diperoleh pada pembahasan sebelumnya dengan cara melakukan analisis pada nilai eigen yang diperoleh dari terorema kestabilan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
|J_1^* - \lambda I| &= 0 \\
\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} &= 0 \\
\lambda^2 - (c_{11} + c_{22})\lambda + (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) &= 0
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh akar karakteristik

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{(c_{11} + c_{22}) + \sqrt{(c_{11} + c_{22})^2 - 4(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})}}{2} \\
\lambda_2 &= \frac{(c_{11} + c_{22}) - \sqrt{(c_{11} + c_{22})^2 - 4(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})}}{2}
\end{aligned}$$

dengan

$$c_{11} + c_{22} = -\alpha_{M_1}M_1^* - \alpha_{P_1}P_1^*$$

$$\begin{aligned}
& (c_{11} + c_{22})^2 - 4(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) \\
& = \alpha_{M_1}^2 M_1^{*2} - 2\alpha_{M_1}\alpha_{P_1} M_1^* P_1^* \\
& + \alpha_{P_1}^2 P_1^{*2} \\
& + 4\frac{1}{r}\beta_{M_1}\beta_{P_1} M_1^* P_1^* (e^{aT} + e^{-bT})(e^{-rT} - 1)
\end{aligned}$$

λ_1 bernilai negatif dengan syarat nilai $\alpha_{M_1}\alpha_{P_1} \leq -\frac{1}{r}\beta_{M_1}\beta_{P_1}(e^{aT} + e^{-bT})(e^{-rT} - 1)$, dan λ_2 juga bernilai negatif maka sistem *prey-predator* pada wilayah I bersifat stabil.

$$\begin{aligned}
& |J_{II}^* - \lambda I| = 0 \\
& \left| \begin{bmatrix} c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0 \\
& \lambda^2 - (c_{31} + c_{42})\lambda + (c_{31}c_{42} - c_{32}c_{41}) = 0 \\
& \text{Sehingga diperoleh akar karakteristik} \\
& \lambda_3 = \frac{(c_{31} + c_{42}) + \sqrt{(c_{31} + c_{42})^2 - 4(c_{31}c_{42} - c_{32}c_{41})}}{2} \\
& \lambda_4 = \frac{(c_{31} + c_{42}) - \sqrt{(c_{31} + c_{42})^2 - 4(c_{31}c_{42} - c_{32}c_{41})}}{2}
\end{aligned}$$

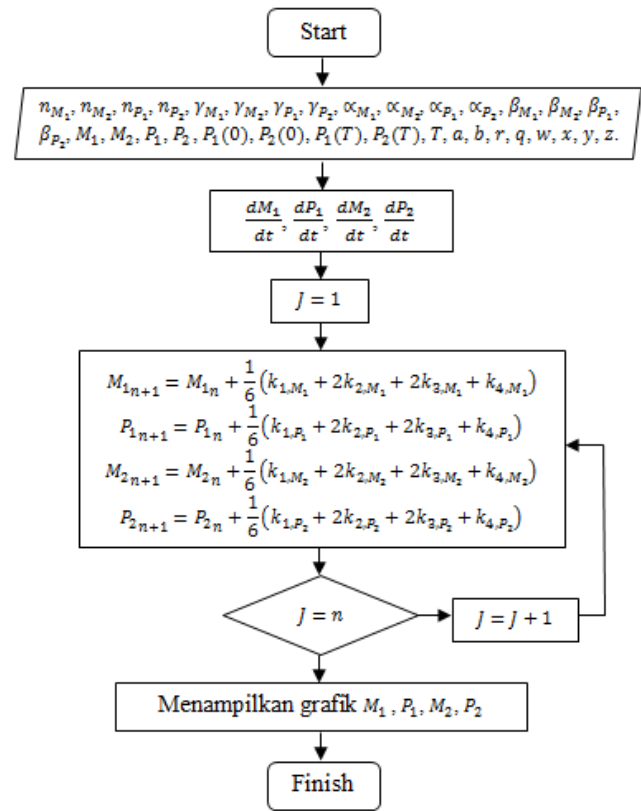
dengan

$$\begin{aligned}
c_{31} + c_{42} & = ((-\alpha_{M_2} M_2^*) + (-\alpha_{P_2} P_2^*)) \\
& = -\alpha_{M_2} M_2^* - \alpha_{P_2} P_2^* \\
(c_{31} + c_{42})^2 - 4(c_{31}c_{42} - c_{32}c_{41}) \\
& = \alpha_{M_2}^2 M_2^{*2} - 2\alpha_{M_2}\alpha_{P_2} M_2^* P_2^* \\
& + \alpha_{P_2}^2 P_2^{*2} \\
& + 4\frac{1}{z}\beta_{M_2}\beta_{P_2} M_2^* P_2^* (e^{wT} + e^{-xT})(e^{-zT} - 1)
\end{aligned}$$

λ_3 bernilai negatif dengan syarat nilai $\alpha_{M_2}\alpha_{P_2} \leq -\frac{1}{z}\beta_{M_2}\beta_{P_2}(e^{wT} + e^{-xT})(e^{-zT} - 1)$, dan λ_4 juga bernilai negatif maka sistem *prey-predator* pada wilayah I bersifat stabil.

E. Simulasi

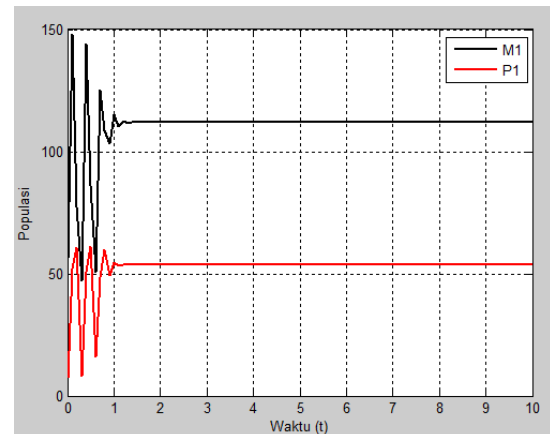
Simulasi ini di lakukan untuk mencari kestabilan dan penyelesaian numerik sistem menggunakan metode *runge-kutta* dengan bantuan software MATLAB R2010a, proses simulasi berjalan sebagai berikut



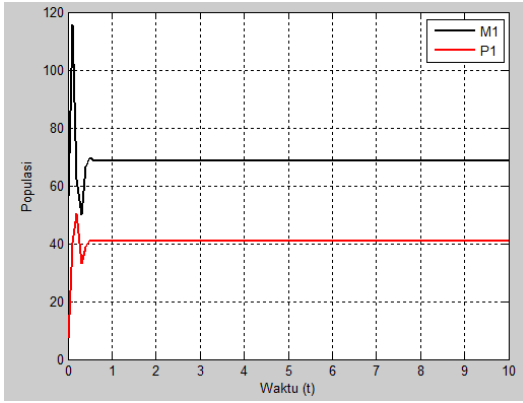
Gambar 2. Flow Chart Simulasi

Simulasi ini mengambil studi kasus pada perairan Indonesia yaitu mengambil contoh ikan tuna sebagai *predator* dan ikan teri sebagai *prey*, dan dipilih wilayah I adalah daerah WPP-RI 713 dan wilayah II adalah WPP-RI 714, sesuai pembagian wilayah perairan Indonesia berdasarkan Peraturan Menteri Kelautan dan Perikanan Republik Indonesia Nomor PER.01/MEN/2009 tentang Wilayah Pengelolaan Perikanan Republik Indonesia Menteri Kelautan dan Perikanan Republik Indonesia [1]. Berikut adalah hasil simulasi sistem

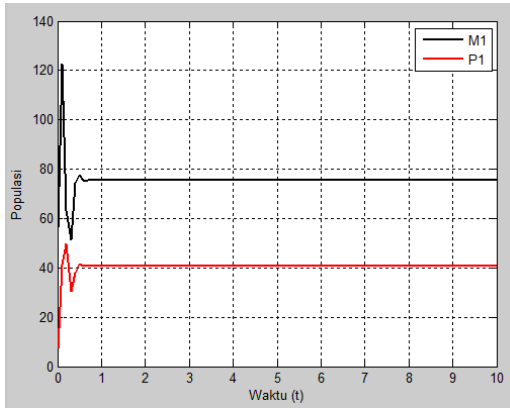
Simulasi pada wilayah I dilakukan percobaan tiga kali yaitu sebagai berikut



Gambar 3. Grafik Percobaan Pertama Simulasi Wilayah I ($n_{M_1} = 30$, $n_{P_1} = 10$, $\gamma_{M_1} = 0.001$, $\gamma_{P_1} = 0.664$, $\alpha_{M_1} = 0.01$, $\alpha_{P_1} = 0.7$, $\beta_{M_1} = 0.48$, $\beta_{P_1} = 0.1$, $a = 0.25$, $b = 0.25$, $r = 0.25$, $q = 0.25$, $M_1 = 56.31155$, $P_1 = 7.294$)

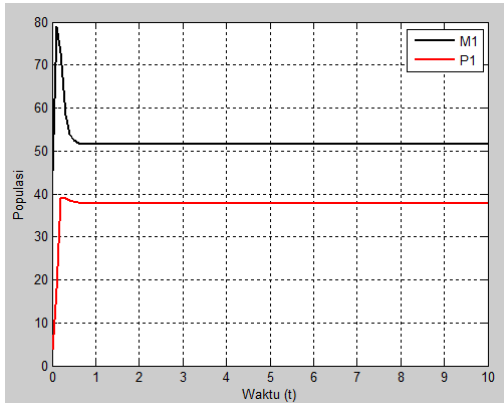


Gambar 4. Grafik Percobaan Kedua Simulasi Wilayah I
($n_{M_1} = 30$, $n_{P_1} = 10$, $\gamma_{M_1} = 0.001$, $\gamma_{P_1} = 0.664$, $\alpha_{M_1} = 0.01$, $\alpha_{P_1} = 0.7$, $\beta_{M_1} = 0.6$, $\beta_{P_1} = 0.1$ $a = 0.25$, $b = 0.25$, $r = 0.25$, $q = 0.25$, $M_1 = 56.31155$, $P_1 = 7.294$)

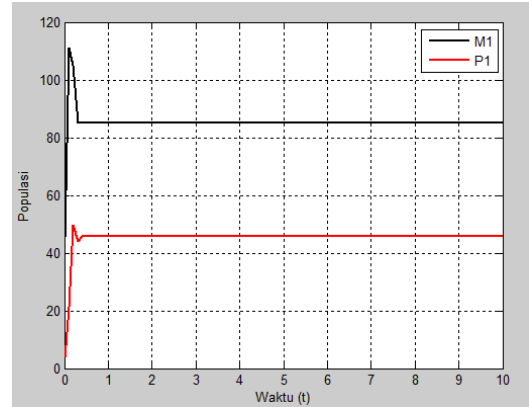


Gambar 5. Grafik Percobaan Ketiga Simulasi Wilayah I
($n_{M_1} = 30$, $n_{P_1} = 10$, $\gamma_{M_1} = 0.001$, $\gamma_{P_1} = 0.8$, $\alpha_{M_1} = 0.01$, $\alpha_{P_1} = 0.7$, $\beta_{M_1} = 0.06$, $\beta_{P_1} = 0.1$ $a = 0.25$, $b = 0.25$, $r = 0.25$, $q = 0.25$, $M_1 = 56.31155$, $P_1 = 7.294$)

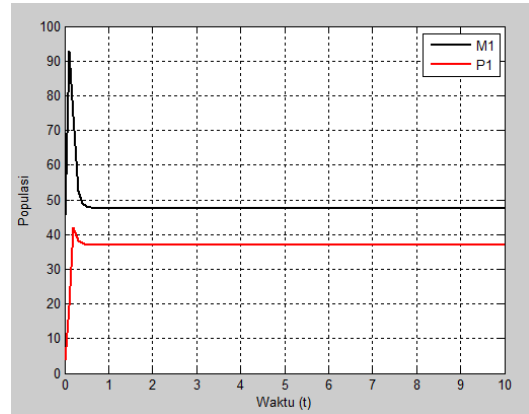
Selanjutnya dilakukan simulasi pada wilayah II sebagai berikut



Gambar 6. Grafik Percobaan Pertama Simulasi Wilayah II
($n_{M_2} = 30$, $n_{P_2} = 10$, $\gamma_{M_2} = 0.4$, $\gamma_{P_2} = 0.77$, $\alpha_{M_2} = 0.1$, $\alpha_{P_2} = 0.52$, $\beta_{M_2} = 0.27$, $\beta_{P_2} = 0.6$, $w = 0.25$, $x = 0.25$, $y = 0.25$, $z = 0.25$, $M_2 = 45.351$, $P_2 = 3.5671$)



Gambar 7. Grafik Percobaan Kedua Simulasi Wilayah II
($n_{M_2} = 30$, $n_{P_2} = 10$, $\gamma_{M_2} = 0.23$, $\gamma_{P_2} = 0.77$, $\alpha_{M_2} = 0.1$, $\alpha_{P_2} = 0.52$, $\beta_{M_2} = 0.27$, $\beta_{P_2} = 0.6$, $w = 0.25$, $x = 0.25$, $y = 0.25$, $z = 0.25$, $M_2 = 45.351$, $P_2 = 3.5671$)



Gambar 8. Grafik Percobaan Kedua Simulasi Wilayah II
($n_{M_2} = 30$, $n_{P_2} = 10$, $\gamma_{M_2} = 0.23$, $\gamma_{P_2} = 0.77$, $\alpha_{M_2} = 0.1$, $\alpha_{P_2} = 0.52$, $\beta_{M_2} = 0.4$, $\beta_{P_2} = 0.06$, $w = 0.25$, $x = 0.25$, $y = 0.25$, $z = 0.25$, $M_2 = 45.351$, $P_2 = 3.5671$)

IV. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan dalam tugas akhir ini dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Dengan mempelajari fenomena yang ada dan diberikan beberapa asumsi model populasi *prey-predator* dengan migrasi *predator* pada dua wilayah. Model I dan II berupa sistem persamaan nonlinear sebagai berikut :
 - a. Model I yaitu model pada wilayah I

$$\frac{dM_1}{dt} = M_1 \left\{ n_{M_1}(1 - \gamma_{M_1}) - \gamma_{M_1} - \alpha_{M_1}M_1 - \beta_{M_1}P_1 \int_0^T k_{P_1}^-(t)dt - \beta_M \int_0^T k_{P_1}^+(t)P_2 dt \right\}$$

$$\frac{dP_1}{dt} = P_1 \left\{ n_{P_1}(1 - \gamma_{P_1}) - \gamma_{P_1} - \alpha_{P_1}P_1 + \beta_{P_1}M_1(k_{M_1}^+(t) + k_{M_1}^-(t)) - \int_0^T k_{P_1}^-(t)dt + \int_0^T k_{P_1}^+(t)P_2 dt \right\}$$

- b. Model II yaitu model pada wilayah II

$$\frac{dM_2}{dt} = M_2 \left\{ n_{M_2}(1 - \gamma_{M_2}) - \gamma_{M_2} - \alpha_{M_2} M_2 \right. \\ \left. - \beta_{M_2} P_2 \int_0^T k_{P_2}^-(t) dt \right. \\ \left. - \beta_{M_2} \int_0^T k_{P_2}^+(t) P_1 dt \right\}$$

$$\frac{dP_2}{dt} = P_2 \left\{ n_{P_2}(1 - \gamma_{P_2}) - \gamma_{P_2} - \alpha_{P_2} P_2 \right. \\ \left. + \beta_{P_2} M_2 (k_{M_2}^+(t) + k_{M_2}^-(t)) \right. \\ \left. - \int_0^T k_{P_2}^-(t) dt + \int_0^T k_{P_2}^+(t) P_1 dt \right\}$$

Kondisi awal

$$M_1(0) = M_{10}, P_1(0) = P_{10},$$

$$M_2(0) = M_{20}, P_2(0) = P_{20}$$

Kondisi batas

$$(M_1)_{\min} \leq M_1 \leq (M_1)_{\max}, (M_2)_{\min} \leq M_2 \leq (M_2)_{\max}$$

$$(P_1)_{\min} < (M_1)_{\max}, (P_1)_{\max} \geq (M_1)_{\max},$$

$$(P_2)_{\min} < (M_2)_{\max}, (P_2)_{\max} \geq (M_2)_{\max}$$

2. Model pada wilayah I dan wilayah II memiliki titik kesetimbangan. Syarat kestabilan kedua titik kesetimbangan tersebut adalah sebagai berikut

- Hasil analisis kestabilan sistem wilayah I diperoleh bahwa λ_1 bernilai negatif ketika banyaknya *prey* dan *predator* yang meninggal akibat kekurangan makanan berjumlah kurang dari sama dengan jumlah *prey* yang dimangsa oleh *predator* yang berada pada wilayah I, dan λ_2 juga bernilai negatif maka sistem *prey-predator* pada wilayah I bersifat stabil.
- Hasil analisis kestabilan sistem wilayah II diperoleh bahwa λ_3 bernilai negatif ketika banyaknya *prey* dan *predator* yang meninggal akibat kekurangan makanan berjumlah kurang dari sama dengan jumlah *prey* yang dimangsa oleh *predator* yang berada pada wilayah II, dan λ_4 juga bernilai negatif maka sistem *prey-predator* pada wilayah II bersifat stabil.

dengan syarat pada titik kesetimbangan pada masing-masing wilayah sebagai berikut

- Besar populasi *prey* yang tumbuh harus lebih besar dari pada *predator* yang bermigrasi dari wilayah lain menuju wilayah yang diamati dan jumlah *prey* yang dipanen
- Besar populasi *predator* yang tumbuh dan besar populasi *predator* yang bermigrasi dari wilayah lain menuju wilayah yang diamati harus lebih besar daripada jumlah *predator* yang dipanen dan jumlah *predator* yang bermigrasi dari wilayah yang diamati menuju wilayah lain.

3. Hasil simulasi diperoleh sebagai berikut

- Simulasi pada wilayah I diperoleh waktu stabil kedua populasi saat waktu selama 2.5 tahun, terjadi kelahiran yang sangat besar dan pemanenan yang sangat kecil pada populasi *prey* sehingga mengakibatkan jumlah *prey* meningkat, dan *predator* juga mengalami peningkatan karena tingkat kelahiran yang cukup besar dan meningkat karena bergantung

pada populasi *prey* yang mengalami peningkatan juga, dengan jumlah tuna sebanyak 536421 ton dan ikan teri sebanyak 1119728 ton.

- Simulasi pada wilayah II diperoleh waktu stabil kedua populasi pada waktu selama 1.6 tahun populasi mengalami peningkatan karena tingkat kelahiran yang sangat besar, dan populasi *predator* mengalami kenaikan populasi akibat tingginya tingkat kelahiran, dengan jumlah tuna sebanyak 378149 ton dan teri sebanyak 515334 ton.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] (PERATURAN KEMENTERIAN KELAUTAN, 2009) (RI, 2009)
- [2] Bellomo, N., Angelis, E.D., Delitala, M. (2007), *Lecture Notes on Mathematical Modelling in Applied Sciences*, Department of Mathematics Politecnico Torino, Italy.
- [3] Boyce, W.E., dan DiPrima, R.C. (2012), *Elementary Differential Equations, 10th Edition*, John Wiley & Sons, Inc, United State of America.
- [4] Hariyanto., Widodo, B., Budiantara, I.N., Nidom, C.A. (2013). "The Contruction of a Model of Pre-Coalition between H1N1-p and H5N1 Influenza Virus in Indonesia", *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 7, 2013, no. 99, hal. 4899 – 4907.
- [5] Kusumayadi, E.A. (2015), "Analisis Sistem Dinamik Model Penyebaran Penyakit Menular Antar Dua Wilayah dan Kontrol Optimal pada Populasi Infected, Tesis. Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Surabaya.
- [6] Narayan, K.L. dan Ramacharyulu, N.CH.P. (2008), "A Prey-Predator Model with an Alternative Food for the Predator, Harvesting of Both the Species and with A Gestation Period for Interaction", *Journal International of Open Problems Compt, Math* Vol.1, No.1, hal 71-79.
- [7] Siahaan, N.H.T., (2004), *Hukum Lingkungan dan Ekologi Pembangunan*, Erlangga. Jakarta.
- [8] Subiono. (2013), *Sistem Linear dan Kontrol Optimal*, Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Surabaya.
- [9] V. Volterra, *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi*, Mem. R. Accad. Naz. dei Lincei 2 (1926) 31–113.